

Dans cette séance on va voir

03.11 167

- (i) la décomposition QR d'une matrice $\leftarrow$ application de GSV
- (ii) la méthode des moindres carrés $\rightarrow$ trois méthodes de calcul

Décomposition QR (Section 12.8 des notes de Sacha)

But : étant donné

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ avec } \text{rang}(A) = n$$

on veut trouver t.q. $Q^T \cdot Q = I_n$

$$(i) Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

(i.e. Q orthogonale)

$$(ii) R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

triangulaire sup

on l'appelle
décomposition
QR de A

$$A = QR$$

Définition 14.3

Une matrice $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est dite

orthogonale si $Q^T \cdot Q = I_n$.

Méthode pour trouver
Q et R

(pour $\text{rang}(A) = n$)

① On écrit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$

colonnes de A

et on applique GS à $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$
pour trouver une BON de $\text{Im}(A)$

$$B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$$

② On pose

$$Q := [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$R := Q^T \cdot A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Thm 12.45 | Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a rang n , alors Q est une matrice

orthogonale, R est triangulaire supérieure et $A = Q \cdot R$.

dont le premier coeff. non nul de chaque
ligne non nulle est > 0

(Preuve) On rappelle le procédé de GS appliqué à $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 := \bar{a}_1 \\ \bar{v}_2 := \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 := \bar{a}_3 - \frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n := \bar{a}_n - \frac{\bar{a}_n \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\bar{a}_n \cdot \bar{v}_{n-1}}{\|\bar{v}_{n-1}\|^2} \bar{v}_{n-1} \end{array} \right. \quad \text{Normalisation} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} \\ \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} \\ \bar{u}_3 := \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} \\ \vdots \\ \bar{u}_n := \frac{\bar{v}_n}{\|\bar{v}_n\|} \end{array} \right.$$

En conséquence,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 = \|\bar{v}_1\| \bar{u}_1 \\ \bar{a}_2 = (\bar{a}_2 \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + \|\bar{v}_2\| \bar{u}_2 \\ \bar{a}_3 = (\bar{a}_3 \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + (\bar{a}_3 \cdot \bar{u}_2) \bar{u}_2 + \|\bar{v}_3\| \bar{u}_3 \\ \vdots \\ \bar{a}_n = (\bar{a}_n \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + (\bar{a}_n \cdot \bar{u}_2) \bar{u}_2 + (\bar{a}_n \cdot \bar{u}_3) \bar{u}_3 + \dots + (\bar{a}_n \cdot \bar{u}_{n-1}) \bar{u}_{n-1} + \|\bar{v}_n\| \bar{u}_n \end{array} \right.$$

Cela nous dit que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \|\bar{v}_1\| & \bar{a}_2 \cdot \bar{u}_1 & \bar{a}_3 \cdot \bar{u}_1 & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{u}_1 \\ 0 & \|\bar{v}_2\| & \bar{a}_3 \cdot \bar{u}_2 & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{u}_2 \\ 0 & 0 & \|\bar{v}_3\| & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{u}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\bar{v}_n\| \end{pmatrix}}_R$$

En plus

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_1^T \bar{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u}_n^T \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n^T \bar{u}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{u}_n \cdot \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \cdot \bar{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

□

Et si $\text{rang}(A) < n$?

Le résultat est encore vrai mais

[68]

On définit $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_r]$ avec $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}$ BON obtenue de GS appliquée à base $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}$ de $\text{Im}(A)$ formée de colonnes retirables de $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ et $R = Q^T A$.

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet Q \in M_{m \times r}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \\ \bullet R \in M_{r \times n}(\mathbb{R}) \text{ échelonnée dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est } > 0. \end{array} \right.$
 où $r := \text{rang}(A)$

Thm. 12.47 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a rang r , alors

Q est orthogonale, R est échelonnée dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est > 0 et $A = QR$.

$\underbrace{Q \in M_{m \times r}(\mathbb{R})}$
 $\underbrace{R \in M_{r \times n}(\mathbb{R})}$

Exemple/Exercice 12.46

On calcule la décomposition QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

Ici $\text{rang}(A) = 2$, $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le procédé de GS nous donne

$$\bar{v}_1 := \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 := \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

En conséquence

$$Q := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

et

$$R := Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

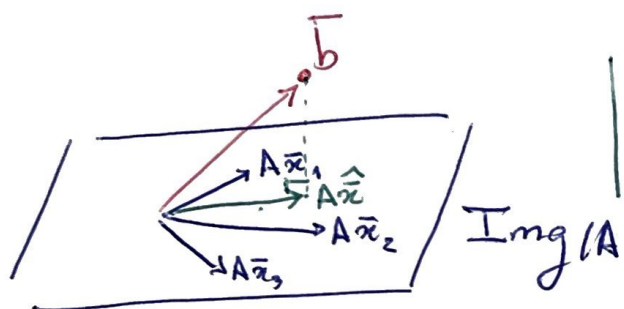
$\uparrow \|\bar{v}_1\|$
 $\uparrow \|\bar{v}_2\|$

Chapitre 13: Méthode des moindres carrés

Motivation Souvent on veut résoudre $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ pour $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
 $\underbrace{A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})} \quad \underbrace{\bar{b} \in \mathbb{R}^m}$

mais $(*)$ est S.E.L incompatible

On fait quoi alors? $\longrightarrow$ On peut essayer de trouver le $\hat{x}$ le plus proche d'être une solution de $(*)$:



$$\|A \hat{x} - \bar{b}\| \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\|, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Définition 13.3 Pour un S.E.L $(*) A \bar{x} = \bar{b}$, avec $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, une pseudo-solution de $(*)$, aussi appelée une solution de $(*)$ au sens des moindres carrés, est un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait:

$$(MC) \quad \|A \hat{x} - \bar{b}\| \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\| \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$$(\Leftrightarrow \|A \hat{x} - \bar{b}\|^2 \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\|^2 \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$(\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m ((A \hat{x})_j - b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^m ((A \bar{x})_j - b_j)^2 \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

RRK: comme c'est une somme de carrés on parle de "moindres carrés".

Trois méthodes pour trouver la solution de (*) au sens de [69] moindres carrés (MC)

Méthode 1 $\hat{\bar{x}}$ est sol de (*) au sens de MC
 $\Updownarrow$
 $\hat{\bar{x}}$ est sol. de $A \cdot \bar{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})$

On résout possibles. $A \cdot \bar{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})$ et cela donne tous les $\hat{\bar{x}}$
(c'est S.E.L. est compatible!)

(Preuve) Cela suit de la définition de projection orthogonale $\square$

RR Cette méthode n'est pas optimale en général (☹)

- car
- ① Il faut une base de $\text{Im}(A)$
 - ② Il faut appliquer QS pour trouver une BON de $\text{Im}(A)$
 - ③ Il faut calculer la projection orthogonale de $\bar{b}$ sur $\text{Im}(A)$
 - ④ Il faut résoudre le S.E.L. $A \cdot \bar{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})$.

Méthode 2 $\hat{\bar{x}}$ est sol de (*) au sens de MC
 $\Updownarrow$
 $\hat{\bar{x}}$ est sol de l'équation normale $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$
(Thm 13.6)

On résout l'équation normale $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$ et cela donne tous les $\hat{\bar{x}}$ possibles
(c'est S.E.L. est compatible!)

(Preuve) On écrit $\bar{b} = (\bar{b} - \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})) + \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b}) = b_{\perp} + b_{\parallel}$
 $\begin{matrix} \text{=: } b_{\perp} \in \text{Im}(A)^{\perp} \\ \text{=: } b_{\parallel} \in \text{Im}(A) \\ \text{=: } \text{Col}(A)^{\perp} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{=: } b_{\parallel} \in \text{Im}(A) \\ \text{=: } \text{Col}(A) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \nearrow \\ \text{uniques!} \end{matrix}$

Comme $\text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$ (Thm 12.18, feuille 62),

(□) $A^T \cdot \bar{b} = A^T(\bar{b}_\perp + \bar{b}_\parallel) = 0 + A^T \cdot \bar{b}_\parallel$,
 alors si $\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC, i.e. $A\hat{x} = \bar{b}_\parallel$
 par la méthode 1, alors $A^T A \cdot \hat{x} = A^T \bar{b}_\parallel = A^T \cdot \bar{b}$, i.e. $\hat{x}$
 est sol. de l'équation normale. Réciproquement, si $\hat{x}$
 est sol de l'équation normale $A^T A \cdot \hat{x} = A^T \cdot \bar{b}$, on
 a que $A^T (A \cdot \hat{x} - \bar{b}) = 0$, i.e. $\underbrace{A\hat{x} - \bar{b}}_{\substack{\in \text{Col}(A) \\ \text{ce qui équivaut à}}} \in \text{Ker}(A^T) = \text{Col}(A)^\perp$
 $\underbrace{(A\hat{x} - \bar{b})}_{\in \text{Col}(A)} + \underbrace{\bar{b}_\perp}_{\in \text{Col}(A)^\perp}$

$$A\hat{x} - \bar{b}_\parallel = 0, \text{ i.e. } A\hat{x} = \bar{b}_\parallel$$

En conséquence $\hat{x}$ est une sol de (*) au sens de MC. □

<u>Méthode 3</u>	$\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC
(Thm 13.11)	$\hat{x}$ est sol. de $R \cdot \hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}$ par A=QR déc. QR

(Preuve) Si $\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC, alors
 $A\hat{x} - \bar{b} \in \text{Col}(A)^\perp = \text{Col}(Q)^\perp = \text{Ker}(Q^T)$
 $\uparrow \text{Im}(A) = \text{Im}(Q)$ $\uparrow \text{Thm 12.18}$

$$\Rightarrow Q^T (A \cdot \hat{x} - \bar{b}) = 0 \Rightarrow \underbrace{Q^T A}_{=: R} \hat{x} = Q^T \cdot \bar{b} \Rightarrow \boxed{R \cdot \hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}}$$

Réciproquement, si $\hat{x}$ est sol. de $R \hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}$, alors $R \hat{x} = Q^T \bar{b}$,
 i.e. $Q^T A \hat{x} = Q^T \bar{b}$, ce qui implique $\underbrace{R^T Q^T A}_{=(QR)^T} \hat{x} = \underbrace{R^T Q^T \bar{b}}_{=(QR)^T}$,
 i.e. $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$. Par la méthode 1, on a que $\hat{x}$ est une sol de
 (*) au sens de MC. □

Exemple/Exercice 13.7 Résoudre au sens de MC le SFL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

via l'équation normale:

(EN) Dans ce cas, il faut résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{6878} \begin{pmatrix} 3 & -79 \\ -79 & 4373 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12626}{6878} \\ \frac{192536}{6878} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{6313}{3439} \\ \frac{96268}{3439} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,83... \\ 27,99... \end{pmatrix}$$

Exemple/Exercice 13.13 Résoudre au sens de MC le SFL

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

via la décomposition QR.

(QR) Il faut résoudre $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, pour $A = QR$.

On calcule donc Q et R :

$$\textcircled{1} \begin{cases} \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 := \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 = \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^3}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} Q^T \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{R \cdot \bar{x} = Q^T \cdot \bar{b}} \text{ donne } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Avantage de $\boxed{QR}$ sur $\boxed{EN}$ $\rightarrow$ $R \bar{x} = Q^T \bar{b}$ est un SE triangulaire.

mais Q est parfois difficile à calculer (car beaucoup de $\sqrt{\quad}$).